СЕКЦІЯ XVIII.
СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ, МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ

ОЦІНЮВАННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ФУНКЦІОНУВАННЯ ОДИНИЦЬ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ МЕТОДОМ DEA

Іванов Сергій Миколайович
ORCID ID: 0000-0002-3994-280X
канд. екон. наук, доцент, доцент кафедри
математичного моделювання та статистики
КНЕУ ім. В. Гетьмана, Україна

Data Envelopment Analysis (DEA) як метод оцінки ефективності виробництва був запропонований в кінці сімдесятих років 20-го століття. В даний час він став одним з найбільш важливих інструментів прийняття рішень та оцінки ефективності діяльності різних виробничих та невиробничих підрозділів та об'єктів загалом. DEA використовується в різних сферах діяльності: при оцінці рівня громадської безпеки [1], при оцінці ефективності лікарняного сервісу [2], фінансової ефективності страхових компаній [3], систем розподілу енергії [4] і в багатьох інших.

В основі методу лежить ідея М. Фаррелла (1957) щодо визначення межі ефективності виробництва [5]. DEA знайшов визнання в 1978 р. після публікації статті [6]. Подальший розвиток методу призвів до створення нових моделей, таких як мультиплікативні (1982, 1983), BCC (1984), адитивні (1985) тощо.

Усі моделі стосуються проблем економіки та менеджменту, та їхня реалізація дає корисні результати. Орієнтація моделей різна: вони можуть бути орієнтовані на вхід (ресурси), вихід (досягнуті результати), на вхід та вихід одночасно. В них може враховуватися зростаюча, спадна чи постійна норми віддачі на масштаб (return to scales), що має місце у виробництві, з узагальненням у разі безлічі виходів. За допомогою моделей визначається межа ефективності, яка може набути форми кусково-лінійної функції, кускової лінійно-логарифмічної, кускової функції Кобба-Дугласа з узагальненням для ситуацій, коли має місце безліч входів і безліч виходів у процесі виробництва. Моделі допускають використання нескінченно малих (неархімедових) величин, можуть бути орієнтовані на зниження рівня «входу» чи збільшення рівня «виходу» задля досягнення ефективності.

Постановка задачі. Розглядаються n одиниць прийняття рішень (ОПР), які мають бути оцінені з точки зору їхньої ефективності. Кожна ОПР споживає різну кількість m входів (ресурсів), щоб отримати t різних виходів (результатів використання ресурсів). Інакше, j-а ОПР споживає кількості $X_j = \{x_{ij}\}$ входів $(i = \overline{1,m})$ і виробляє кількості $Y_j = \{y_{rj}\}$ виходів $(r = \overline{1,t})$. Дані величини отримані шляхом спостережень за реальними об'єктами. Для них ми припускаємо, що $x_{ij} > 0$ і $y_{rj} > 0$. У цих термінах матриця виходу розмірністю $(t \times n)$ визначається через Y, а матриця входу розмірністю $(m \times n)$ визначається через X. Кожна j-а ОПР, що використовується для порівняння ефективності її функціонування, споживає ті ж самі входи і виробляє

ті ж самі виходи, хоча й у різних кількостях. Для заданої виробничої множини (X та Y) необхідно визначити, яка ОПР ефективно функціонує, а яка ні.

Моделі DEA допомагають знайти підмножини з n ОПР, які визначають частини поверхні оболонки (тобто границю), що відповідають ефективно функціонуючим ОПР. Геометрична форма кожної поверхні оболонки встановлюється типом використовуваної DEA-моделі. Щоб бути ефективною, точка P_j, яка відповідає j-й ОПР, повинна лежати на цій поверхні. ОПР, які не лежать на поверхні, вважаються неефективними, і за допомогою DEA-методу визначаються джерела і рівень даної неефективності. Метод DEA використовує міру ефективності Парето для кожної ОПР для того, щоб визначити, чи є вона ефективною чи ні. З метою визначення ефективності у методі DEA прийнято розраховувати спеціальні відношення, які можуть бути різної форми, залежно від орієнтації моделі.

Візьмемо для кожного входу ваги $v_i\ (i = \overline{1,m})$, а для кожного виходу – $w_r\ (r = \overline{1,t})$. Якщо модель орієнтована на вхід (що означає, що метою аналізованих ОПР є максимальне зниження рівня входу для того, щоб досягти ефективності при заданому рівні виходу), то форма відношення має бути наступною:

$$\frac{\sum_{r=1}^{t} w_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}}, \qquad \forall\ j = \overline{1,n}.$$

Чисельник відношення можна розглядати як «віртуальний вихід», оскільки ваги перетворять t рівнів виходу в єдиний скаляр. Аналогічно, знаменник відношення може розглядатися як «віртуальний вхід» і, отже, загальне відношення зводиться до скалярної міри ефективності. ОПР$_0$ може вважатися ефективною тоді і лише тоді, коли вона досягає значення одиниці у відношенні

$$\frac{\sum_{r=1}^{t} w_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0}} = max\left\{\frac{\sum_{r=1}^{t} w_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \mid j = \overline{1,n}\right\}. \qquad (1)$$

Інакше, значення відношення, яке менше одиниці, говорить про те, що функціонування відповідної ОПР демонструє відносну неефективність відносно ефективно працюючої ЕПР$_0$. Отже, ефективність будь-якої ОПР може бути виміряна як максимальне відношення зважених виходів до зважених входів за обмежень, що відображають діяльність інших ОПР (інакше відношення буде необмеженим).

DEA-метод використовує у виразі (1) дані спостережень за входами x_{ij} і виходами y_{rj} як константи і підбирає значення ваг входів і виходів таким чином, щоб максимізувати загальну ефективність 0-ї ОПР по відношенню до діяльності інших. Це призводить до формулювання цільової функції (тут і далі одиниця прийняття рішень, для якої розраховується відношення, має індекс 0):

$$maxZ_0 = \frac{\sum_{r=1}^{t} w_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0}}. \qquad (2)$$

Зважаючи на те, що жодна ОПР не може мати оцінку відносної ефективності більше одиниці, вводяться обмеження типу «не більше, ніж одиниця»:

$$\frac{\sum_{r=1}^{t} w_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \le 1,\ \ \forall\ j = \overline{1,n}, \qquad (3)$$

$$v_i > 0,\ \ i = \overline{1,m};\ \ w_r > 0, r = \overline{1,t}. \qquad (4)$$

Модель (2)-(4) розглядається окремо для кожної ОПР, що забезпечує отримання оптимальних наборів ваг. Ваги в цільовій функції вибираються таким чином, щоб максимізувати значення відношення для кожної конкретної ОПР при обмеженні типу

«не більше, ніж одиниця». Ці обмеження забезпечують знаходження таких оптимальних ваг для 0-ї ОПР, при яких оцінка ефективності не перевищить одиниці ні для цієї ОПР, ні для будь-якої іншої. Оцінка ефективності, яка отримується за допомогою моделі (2)-(4), узгоджується з граничними можливостями діяльності об'єкту. Величина її, рівна одиниці, передбачає, що і спостережувана, і потенційна діяльність об'єкта збігаються. У цьому випадку кажуть, що відповідна ОПР є «найкращою у діяльності». Там, де спостерігається діяльність гірша за потенційну, відповідна ОПР отримує оцінку ефективності менше одиниці. Це означає, що її діяльність слабша за ту ОПР, якій відповідають найкращі показники і, отже, вона відносно неефективна.

Аналогічно може бути розглянуте й інше відношення, орієнтоване на вихід:

$$\frac{\sum_{r=1}^{t} v_i x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} w_r y_{rj}}, \qquad \forall\ j = \overline{1,n}.$$

У сенсі орієнтації на вихід було б резонно максимізувати кількість виходів за заданих кількостях входів. Це призводить до формулювання наступної цілі:

$$min\, F_0 = \frac{\sum_{r=1}^{t} v_i x_{i0}}{\sum_{i=1}^{m} w_r y_{r0}} \qquad (5)$$

Ця функція має бути обмеженою:

$$\frac{\sum_{r=1}^{t} v_i x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} w_r y_{rj}} \geq 1,\ \forall\ j = \overline{1,n}\,, \qquad (6)$$

$$v_i > 0,\ i = \overline{1,m};\ \ w_r > 0, r = \overline{1,t}. \qquad (7)$$

Моделі (2)-(4) і (5)-(7) не можуть бути використані в практичних розрахунках оцінки ефективності, оскільки вони мають важкорозв'язні нелінійні та неопуклі властивості. Так, перетворення нелінійної моделі (2)-(4) на лінійну зроблене шляхом прирівнювання знаменника цільової функції моделі до одиниці [6]. З цього випливає наступне формулювання:

$$maxZ_0 = \sum_{r=1}^{t} w_r y_{r0} \qquad (8)$$

за обмежень

$$\sum_{r=1}^{t} w_r y_{rj} - \sum_{r=1}^{t} v_i x_{ij} \leq 0, j = \overline{1,n}\,, \qquad (9)$$

$$\sum_{r=1}^{t} v_i x_{i0} = 1, \qquad (10)$$

$$v_i > 0,\ i = \overline{1,m};\ \ w_r > 0, r = \overline{1,t}. \qquad (11)$$

Розглянута модель є лінійною. Вона обмежує зважену суму входів за допомогою одиниці та максимізує зважену суму виходів 0-ї ОПР, підбираючи відповідні значення v_i та w_r. Слід зазначити, що ваги входів та виходів у моделі суворо позитивні. Щоб задовольнити цим вимогам, обмеження

$$v_i > 0,\ i = \overline{1,m}; w_r > 0, r = \overline{1,t}$$

повинні бути замінені наступним чином:

$$\left.\begin{array}{l} v_i \geq \varepsilon, i = \overline{1,m} \\ w_r \geq \varepsilon, r = \overline{1,t} \end{array}\right\},$$

де ε – нескінченно мала або неархімедова константа зазвичай порядку 10^{-5} або 10^{-6}. З огляду на це модель запишеться наступним чином:

$$maxZ_0 = \sum_{r=1}^{t} w_r y_{r0} \quad (12)$$

за обмежень

$$\sum_{r=1}^{t} w_r y_{rj} - \sum_{r=1}^{t} v_i x_{ij} \le 0, j = \overline{1,n}, \quad (13)$$

$$\sum_{r=1}^{t} v_i x_{i0} = 1, \quad (14)$$

$$\left.\begin{array}{l} -v_i \le -\varepsilon, i = \overline{1,m} \\ -w_r \le -\varepsilon, r = \overline{1,t} \end{array}\right\}. \quad (15)$$

Аналогічної трансформації може бути піддана і модель (5)-(7):

$$min\, F_0 = \sum_{r=1}^{t} v_i x_{i0}, \quad (16)$$

за обмежень

$$\sum_{r=1}^{t} v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{t} w_r y_{rj} \ge 0, j = \overline{1,n}, \quad (17)$$

$$\sum_{r=1}^{t} w_r y_{r0} = 1, \quad (18)$$

$$\left.\begin{array}{l} v_i \ge \varepsilon, i = \overline{1,m} \\ w_r \ge \varepsilon, r = \overline{1,t} \end{array}\right\}. \quad (19)$$

Моделі (12)-(15) та (16)-(19) носять назву моделей CCR за першими літерами прізвищ авторів[1].

Моделі CCR використовують границю із постійним рівнем віддачі («вхід-вихід» та «вихід-вхід») для визначення неефективних ОПР:

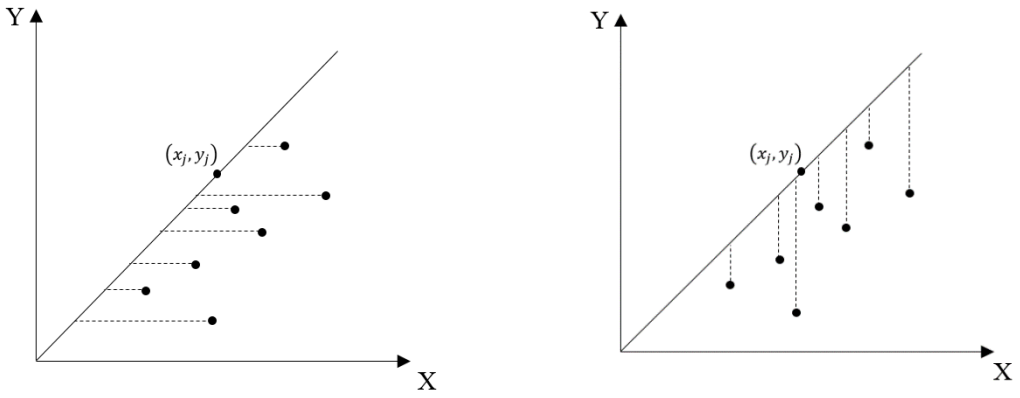

Рис. 1. **Поверхні оболонок для моделей CCR, орієнтованих на вхід (ліворуч) та на вихід (праворуч) на прикладі одного входу та одного виходу**

За допомогою моделей вибирається та ОПР (може бути декілька), що забезпечує максимальне відношення виходу до входу (мінімальне відношення входу до виходу). Наприклад, відношення для задачі, орієнтованої на вхід, інтерпретується як максимальна середня продуктивність та визначає віддачу ефективно працюючої ОПР. Границя з постійним рівнем віддачі є необмеженим променем, що починається в точці перетину осей координат і проходить через точку з максимальною середньою продуктивністю. Точка з координатами (x_j, y_j), яка лежить на промені, відповідає ефективно працюючій ОПР. Решта ОПР, координати яких знаходяться або праворуч (орієнтація на вхід), або нижче (орієнтація на вихід) променю є неефективно працюючими. Відстані від відповідних точок до променю відображають ступінь

[1] Charnes A., Cooper W.W., and Rhodes E. [6]

неефективності.

У випадку моделі з орієнтацією на вхід для того, щоб бути ефективною, відповідна ОПР має споживати меншу кількість входу, ніж вона фактично споживає. Кількісно це може бути оцінено за допомогою виразу:

$$x_{ij}^{efficient} = Z_j^* \cdot x_{ij}^{real},$$

де Z_j^* – значення цільової функції в оптимальному рішенні для j-ї ОПР (менша за одиницю, інакше j-а ОПР вважалася би ефективною).

У випадку моделі з орієнтацією на вихід для того, щоб бути ефективною, відповідна ОПР має виробляти більшу кількість виходу, ніж вона фактично виробляє за наявних ресурсів. Кількісно це може бути оцінено за допомогою виразу:

$$y_{rj}^{efficient} = Z_j^* \cdot y_{rj}^{real},$$

де Z_j^* – значення цільової функції в оптимальному рішенні для j-ї ОПР (більша за одиницю, інакше j-а ОПР вважалася би ефективною).

Загалом, ОПР вважається ефективною при орієнтації на вихід тоді і тільки тоді, якщо вона вважається ефективною і при орієнтації на вхід за тих самих вихідних даних.

При побудові розглянутих моделей CCR в якості форми поверхні ефективного функціонування об'єкта розглядається необмежений промінь, який відповідає умові постійної віддачі на масштаб (constant return to scales – CRS). Однак, часто виникають ситуації, коли необхідно врахувати можливість зміни рівня віддачі на масштаб у разі нарощування виробничого потенціалу об'єкта, що досліджується. Такий підхід забезпечує побудову ефективної виробничої поверхні зі змінним рівнем віддачі (variable return to scales – VRS), який має місце на різних сегментах виробничої поверхні. Приклад поверхонь із різними рівнями віддачі на масштаб наведено на рис. 2. Оскільки допустимими є зростаюча віддача та віддача, що знижується, то границя може включати неефективні точки з позиції постійної віддачі, такі як B (ОПР зі зростаючою віддачею) або D і E (ОПР з рівнем віддачі, що знижується), які, проте, відповідають технічно ефективним для цього рівня функціонування (рівня потужності) ОПР. Як результат – ми маємо кусково-лінійну границю ABCDE.

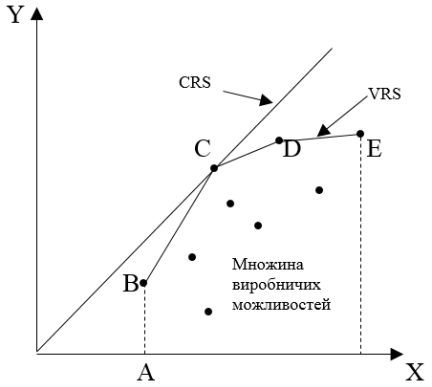

Рис. 2. **Різні типи рівнів віддачі**

Рівень віддачі змінюється від відрізка поверхні до відрізка, кожен із яких представляє розв’язок обмежень задачі. Для комбінацій значень входу та виходу, менших, ніж у ефективної ОПР (тобто вздовж відрізка BC), має місце зростаючий

рівень віддачі. Відрізки, що відображають вищі рівні виробництва, мають рівень віддачі, що знижується. Ефективна з точки зору віддачі ОПР$_C$ (точка С) включена як до числа ефективних з погляду постійного (CRS), так і змінного (VRS) рівнів віддачі. Насправді вона представлена точкою на перетині границь із зростаючим рівнем і таким, що знижується.

Математичні моделі, які дозволяють визначитися з ефективними та неефективними ОПР виглядають наступним чином.

Модель, орієнтовна на вхід:

$$maxZ_0 = \sum_{r=1}^{t} w_r y_{r0} + u_0 \qquad (20)$$

за обмежень

$$\sum_{r=1}^{t} w_r y_{rj} - \sum_{r=1}^{t} v_i x_{ij} + u_0 \le 0, j = \overline{1,n}\,, \qquad (21)$$

$$\sum_{r=1}^{t} v_i x_{i0} = 1, \qquad (22)$$

$$\left.\begin{array}{l} -v_i \le -\varepsilon, i = \overline{1,m} \\ -w_r \le -\varepsilon, r = \overline{1,t} \end{array}\right\}, \qquad (23)$$

$$u_0 - \textit{не обмежена на знак.} \qquad (24)$$

Саме змінна u_0 дозволяє реалізувати в моделі зняття умови необмеженості променю.

Модель, орієнтована на вихід:

$$min\, F_0 = \sum_{r=1}^{t} v_i x_{i0} + g_0, \qquad (25)$$

за обмежень

$$\sum_{r=1}^{t} v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{t} w_r y_{rj} + g_0 \ge 0, j = \overline{1,n}\,, \qquad (26)$$

$$\sum_{r=1}^{t} w_r y_{r0} = 1, \qquad (27)$$

$$\left.\begin{array}{l} v_i \ge \varepsilon, i = \overline{1,m} \\ w_r \ge \varepsilon, r = \overline{1,t} \end{array}\right\}, \qquad (28)$$

$$g_0 - \text{ не обмежена на знак.} \qquad (29)$$

Наведені моделі (16)-(20) та (21)-(25) носять назву моделей ВСС[2].

В адитивній моделі, запропонованій у [8], порівняно з моделлю ВСС, відсутні оцінки входу та виходу і немає конкретної орієнтації (на вхід чи вихід). Вона орієнтована і на вхід, і на вихід одночасно і оперує тією ж самою формою ефективної поверхні оболонки, як і модель ВСС з різними типами віддачі. На відмінність від моделей ВСС, адитивні моделі оперують так званою інтегральною мірою ефективності (або $L1$-мірою), яка враховує обидва види неефективності: за входом і за виходом.

Окрім розглянутих, в методі DEA використовуються і мультиплікативні моделі. Вони дозволяють будувати лінійно-логарифмічну та кускову поверхню Кобба-Дугласа. Використовуються два типи мультиплікативних моделей: інваріантна та варіантна. Мультиплікативна інваріантна модель була запропонована А. Чарнсом, У. Купером, Л. Сейфордом і Дж. Стуцем у 1983 р. Вона є результатом застосування адитивної моделі до логарифмів у вихідних даних. Таким чином, інтерпретація мультиплікативної моделі аналогічна адитивній, з тією лише зміною, що вона оперує

[2] Banker R.D., Charnes A., and Cooper W.W. [7]

трансформованим до логарифмів простором. Варіантна мультиплікативна модель виходить із інваріантної шляхом виключення з неї обмеження опуклості. Ця модель спочатку була розроблена та запропонована тими ж авторами у 1982 р.

Таким чином, метод DEA оцінює лише відносну ефективність – ефективність щодо даних, що розглядаються. Він не дає (і не може дати) оцінки абсолютної ефективності. Якщо моделі CCR задають жорсткі умови для вимірювання ефективності ОПР, то моделі BCC, адитивна і мультиплікативна усувають цю «жорсткість» шляхом використання віддачі на масштаб, що змінюється. Вибір конкретного виду моделі DEA визначається винятково властивостями рівня віддачі, геометрією поверхні оболонки (з визначенням, який із заходів ефективності використовується) та проекцією ефективності, тобто маршрутом від неефективних ЄПР до ефективної границі.

Список використаних джерел:

1. Martin Flegl, Eva Selene Hernández Gress, A two-stage Data Envelopment Analysis model for investigating the efficiency of the public security in Mexico. Decision Analysis Journal. 6 (2023) 100181. URL: https://doi.org/10.1016/j.dajour.2023.100181.
2. Diogo Cunha Ferreira, José Rui Figueira, Salvatore Greco, Rui Cunha Marques, Data Envelopment Analysis models with imperfect knowledge of input and output values: An application to Portuguese public hospital. Expert Systems With Applications. 231 (2023) 120543. URL: https://doi.org/10.1016/j.eswa.2023.120543.
3. Karolina Smęteka, Danuta Zawadzka, Agnieszka Strzelecka, Examples of the use of Data Envelopment Analysis (DEA) to assess the financial effectiveness of insurance companies. Procedia Computer Science. 207 (2022). 3924–3930. URL: https://doi.org/10.1016/j.procs.2022.09.454.
4. Marcelo Azevedo Costa, Cláudio Vítor Maquiné Salvador, Aline Veronese da Silva, Stochastic Data Envelopment Analysis applied to the 2015 Brazilian energy distribution benchmarking model. Decision Analysis Journal. 3 (2022) 100061. URL: https://doi.org/10.1016/j.dajour.2022.100061.
5. Farrell M.J. The measurement of productive efficiency. Journal of the Royal Statistical Society. Series A. 120 (1957), p. 253-290. URL: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5118108/mod_resource/content/1/Farrell%201957.pdf.
6. Charnes A., Cooper W.W., and Rhodes E. Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research. 2 (1978). 429-444. URL: https://personal.utdallas.edu/~ryoung/phdseminar/CCR1978.pdf.
7. Banker R.D., Charnes A., and Cooper W.W. Some models for estimating technical abs scale inefficiencies in data envelopment analysis. Management Science. 30. No. 9 (1984). 1078-1092. URL: https://doi.org/10.1287/mnsc.30.9.1078.
8. Charnes A., Cooper W.W., Golany B., Seiford L.M., and Stutz J. Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical production functions. Journal of Econometrics. 30 (1985). 91-107. URL: https://doi.org/10.1016/0304-4076(85)90133-2.