

ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ ТА МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ РОЗВИВАЛЬНОГО НАВЧАННЯ КУРСУ МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ 014 СЕРЕДНЯ ОСВІТА (ІНФОРМАТИКА) ТА 122 КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ

Соколенко Лілія Олександрівна

кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики та економіки
Національний університет «Чернігівський колегіум» імені Т.Г. Шевченка, Україна

Питання *розвивального навчання математики, особистісно-орієнтованого навчання, розвитку творчого мислення* окреслюють наукові дослідження доктора педагогічних наук, професора Зінаїди Іванівни Слєпкань (1931-2008 р.р.). Цим проблемам присвячений монографічний посібник «Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики» [10]. У посібнику подані методологічні, психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики у середніх закладах освіти. Дана теорія не втратила актуальності і нині, зокрема під час навчання вищої математики у вищих навчальних закладах.

Охарактеризуємо реалізацію згаданих вище ідей під час навчання курсу «Математичний аналіз» студентів, які опановують освітньо професійні програми 014 Середня освіта (Інформатика) та 122 Комп'ютерні науки.

У попередній публікації, «Особливості навчання курсу математичний аналіз студентів спеціальностей 014 Середня освіта (Інформатика) та 122 Комп'ютерні науки» [11], визначено мету вивчення даної дисципліни, охарактеризовано компетентнісний підхід до її навчання, представлено короткі відомості з *історії створення підручника з математичного аналізу на Україні* та дана коротка характеристика підручників, серед яких [2]–[6], [12]–[14] та інші, які ми використовуємо під час навчання курсу, за програмою [7].

Дидактичні принципи розвивального навчання, висунуті Л.В. Занковим: 1) провідна роль теоретичних знань, 2) навчання швидкими темпами, 3) навчання на високому рівні складності, 4) усвідомлення всіма учасниками процесу навчання, 5) систематична робота над загальним розвитком всіх учасників навчального процесу, та психологічні принципи розвивального навчання, висунуті З.І. Калмиковою: 1) систематичний розвиток трьох основних видів мислення (наочно-дійового, або практичного мислення, наочно-образного й абстрактно-теоретичного), 2) проблемність у навчанні, 3) індивідуалізація та диференціація навчання, 4) систематичний розвиток алгоритмічних та евристичних прийомів розумової діяльності, 5) систематичний розвиток мнемонічної діяльності, що сприяє розвитку пам'яті, використовуються під час навчання курсу «Математичний аналіз» студентів ЗВО.

В умовах, що склалися на даний час, ми використовуємо порівняно нову технологію навчання – дистанційну освіту (ДО). Під ДО розуміють комплекс освітніх послуг, які надаються за допомогою спеціалізованого інформаційно-освітнього середовища на будь-якій відстані від тих, хто навчається [10, с. 43].

За основу ДО взято модульний принцип. Кожний модуль відповідає змістовому модулю курсу «Математичний аналіз» [7]. Викладач відіграє роль координатора та консультанта. Засобом взаємодії студентів та викладача, який читає даний курс, є

електронна пошта та платформа ZOOM.

Курс «Математичний аналіз» викладається для студентів згаданих спеціальностей протягом 1-го та 2-го семестрів. У кожному семестрі на лекційні та практичні заняття відводиться по 36 годин аудиторної роботи.

Напередодні лекції студенти отримують текст структурований наступним чином: 1) назва змістового модуля, назва теми та мета її навчання, 2) змістова структура теми, яка супроводжується рекомендованими джерелами для засвоєння кожного з теоретичних питань, 3) математичні поняття та їх властивості, представлені у вигляді структурованої таблиці, що супроводжуються прикладами та контрприкладми, формулюваннями необхідних, достатніх умов та ознак, зауваженнями; 4) доведення теорем у повному тексті лекції. Під час читання лекції даний матеріал демонструється перед студентами, використовуючи платформу ZOOM, та обговорюється. Особлива увага приділяється понятійному апарату, властивостям та ознакам, їх обґрунтуванням та доведенням. Студенти мають можливість з'ясувати незрозумілі для них питання, підготуватись до відповідного практичного заняття.

Напередодні практичного заняття студенти отримують текст структурований наступним чином: 1) назва змістового модуля, назва теми та питання, що будуть розглядатись на практичному занятті з відповідними номерами та умовами задач, які відносяться до аудиторної роботи та виносяться на самостійне опрацювання. Студенти отримують цей матеріал заздалегідь, а отже мають можливість повторити відповідний теоретичний матеріал з лекції, подумати над методами та способами розв'язування задач та їх використанням на практиці.

Під час проведення практичного заняття перед студентами демонструється необхідний теоретичний матеріал, який повторюється, згадуються методи та способи розв'язування задач по даній темі, інколи алгоритми їх використання. Окремі задачі, як приклади, представляються з розв'язаннями. До розв'язання інших задач, якщо студенти не знаходять самостійно їх метод або спосіб розв'язання, надаються вказівки. Вказівки також надаються при виникненні складностей під час використання названих методів та способів. Для цього на практичному занятті використовується розробка з пропусками. Альтернативою до цієї розробки звісно є використання графічного планшета під час проведення заняття.

Розглянемо на прикладах реалізацію окремих дидактичних принципів розвивального навчання, а саме *провідну роль теоретичних знань, навчання швидкими темпами, навчання на високому рівні складності.*

Таблиця 1

Максимум і мінімум функції. Необхідні умови екстремуму. Достатні умови екстремуму в термінах першої похідної
Означення 2 [12, с.170]. Нехай функція f визначена в деякому околі точки a. Точка a називається точкою мінімуму (максимуму) функції f, а $f(a)$ – мінімумом (максимумом) цієї функції в точці a, якщо існує такий окіл $U(a)$, що $\forall x \in U(a), x \neq a$, виконується нерівність $f(a) < f(x)$ ($f(a) > f(x)$). Точки мінімуму і максимуму функції називають її точками екстремуму, а максимум і мінімум функції в точці – екстремумом цієї функції в цій точці.
Теорема 3 (необхідні умови екстремуму) [12, с.170]. Якщо точка a є точкою екстремуму функції f, то її похідна в цій точці або дорівнює нулю, або не існує.
Зауваження 3. Обидва випадки, що вказані в теоремі, можуть бути реалізованими. Наприклад, для кожної з функцій $f_1(x) = x^2$ і $f_2(x) = x$ точка $x = 0$, очевидно, є точкою мінімуму, причому у f_1 похідна в цій точці існує і дорівнює нулю, а у f_2 – не існує.

Продовження табл. 1

Максимум і мінімум функції. Необхідні умови екстремуму. Достатні умови екстремуму в термінах першої похідної	
Зауваження 4. Умови рівності нулю похідної або її не існування в даній точці, будучи необхідними, не є достатніми умовами для того, щоб ця точка була точкою екстремуму для розглядуваної функції.	Контрприклад. Похідна функції $f_3(x) = x^3$ в точці $x = 0$ дорівнює нулю, а похідна функції $f_4(x) = \sqrt[3]{x}$ у цій самій точці не існує, однак точка $x = 0$, очевидно, не є точкою екстремуму як для f_3, так і для f_4.
Зауваження 5. Теорема 3 стверджує, що всі точки екстремуму функції утворюють підмножину множини її критичних точок. Нехай функція φ визначена в деякому околі точки a. Кажуть, що функція φ змінює знак при переході точки x через точку a, якщо існує окіл $U(a)$ такий, що $\varphi(x) < 0 \quad \forall x \in U(a), x < a$, і $\varphi(x) > 0 \quad \forall x \in U(a), x > a$, або навпаки.	
Теорема 4 (достатні умови екстремуму в термінах першої похідної) [12, с.171]. Нехай функція f диференційовна в деякому околі точки a, крім, можливо, самої точки a, в якій функція f неперервна. Якщо при переході точки x через точку a похідна f' змінює знак, то точка a є точкою екстремуму функції f, причому точкою мінімуму, якщо похідна f' змінює знак з «-» на «+», і точкою максимуму, якщо похідна f' змінює знак з «+» на «-».	
Алгоритм дослідження функції $y = f(x)$ на екстремуми. 1. Знайти область визначення функції. 2. Знайти похідну $f'(x)$. 3. Знайти критичні точки. 4. Визначити знак похідної на кожному з інтервалів, на які робиться область визначення критичними точками. 5. Відносно кожної критичної точки визначити, чи є вона точкою максимуму або мінімуму, чи не є точкою екстремуму, використовуючи теорему 4 (достатні умови екстремуму в термінах першої похідної). 6. Знайти максимум і мінімум функції $y = f(x)$.	Приклад. Дослідити на екстремум функцію $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$. Розв'язання. 1. Область визначення даної функції є множина $\mathbf{R}$. $y'(x) = 6x^2 - 12x - 18 = 6(x^2 - 2x - 3) = 6(x - 3)(x + 1)$ 3. $y'(x) = 6(x - 3)(x + 1) = 0$ при $x = -1, x = 3$ 4. $y'(x) < 0$ при $x \in (-1; 3)$. $y'(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -1)$ та при $x \in (3; +\infty)$ 5. Використовуючи теорему 4 (достатні умови екстремуму в термінах першої похідної), приходимо до висновку, що $x_{\max} = -1, x_{\min} = 3$ - точки екстремуму. 6. $y_{\max} = y(-1) = 17, y_{\min} = y(3) = -47$ - екстремуми функції.

Представлений у табл. 1 матеріал є складовою теоретичного матеріалу змістового модуля 2 «Диференціальне числення функції однієї змінної» теми 7 «Застосування похідної». До того ж він відомий студентам першого курсу зі шкільного курсу алгебра і початки аналізу, але на різному рівні. Запропонована таблиця є засобом, який використовується для повторення означення точок екстремуму та екстремумів, необхідної умови екстремуму та достатньої умови екстремуму в термінах першої похідної. До таблиці включені зауваження, які дозволяють неформально систематизувати та повторити цей теоретичний матеріал. Також подано алгоритм дослідження функції на екстремуми, що супроводжується окремим прикладом. Студенти, які мають недостатній рівень володіння представленим матеріалом, можуть детально повторити його та підготуватись до практичного заняття по даній темі.

Розглянемо на прикладах реалізацію окремих психологічних принципів розвивального навчання, а саме: систематичний розвиток трьох основних видів мислення (наочно-дійового, або практичного мислення, наочно-образного й

абстрактно-теоретичного).

Потреба у наочності визначається складністю та абстрактністю поняття, що вивчається. До математичних понять курсу «Математичний аналіз», що потребують унаочнення відносяться поняття границя послідовності, границя функції, неперервність функції та ін. Тому саме під час введення цих понять розглядається їх геометричний зміст, який дозволяє краще усвідомити математичне поняття.

Проблемність у навчанні є одним з найефективніших психологічних принципів, які активізують навчально-пізнавальну діяльність студентів.

Вивчаючи певний теоретичний матеріал слід ставити перед студентами проблемні запитання. Наприклад, вивчаючи теорему про неперервність диференційовної функції в точці варто використати такий підхід (табл.2).

Таблиця 2

Означення 2. [12, с.135]. Функція f називається диференційовною в точці a , якщо вона має похідну в цій точці.	
Теорема 1. Якщо функція диференційовна в деякій точці, то вона неперервна в цій точці.	
Чи є твердження обернене до теореми 1 , правильним: якщо функція неперервна в деякій точці, то вона є диференційовною в цій точці?	Завдання. Якщо «так», то доведіть обернене твердження. Якщо «ні», то спростуйте його (запропонуйте контрприклад).

Якщо студенти самостійно не знайдуть відповідь на поставлене запитання, то слід з ними розглянути наступний контрприклад.

Контрприклад. Функція $f(x) = |x|$ неперервна в точці $x = 0$.

$\Delta f(0) = |\Delta x| \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Але вона не є диференційовною у вказаній точці.

Індивідуалізація та диференціація навчання є ще одним психологічним принципом, який ми дотримуємось під час навчання курсу «Математичний аналіз», зокрема під час проведення практичних занять, виконання самостійних та контрольних завдань. Представляємо фрагмент практичного заняття з змістового модуля 1 «Вступ до аналізу» на тему: «**ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ ТА ЇХ ГРАНИЦІ**».

Питання. 1) Числова послідовність. Поняття границі послідовності. Геометричний зміст границі. Розв'язування задач на доведення. 2) Теореми про границі послідовностей та їх застосування до розв'язування задач на обчислення. 3) Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності. 4) Монотонні послідовності. Число e . Використання однієї з основних границь $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ до знаходження границь послідовностей.

Питання	Аудиторна робота	Домашня робота (КЗСР 1)
2	Тема 3 (повторити теорію). №2, №3, №4 (а-в), №5 (а, б, ж).	Тема 3 (повторити теорію). №4 (г-є), №5 (б-є).
3	Тема 3 (повторити теорію).	Тема 3 (повторити теорію).
4	Тема 3 (повторити теорію). №6 (а-в).	Тема 3 (повторити теорію). №6 (г).

2) Теореми про границі послідовностей та їх застосування до розв'язування задач на обчислення.

№ 2. Знайдіть границі послідовностей:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}; \quad б) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 3}{2n^2 + 4n + 7}.$$

№3. Знайдіть границі послідовностей:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{4n^3 + 3n^2 + 2}; \quad б) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n^2 + 7}; \quad в) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 6}{n^2}; \quad г) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3+n} - \sqrt{2+n}).$$

№4. Знайдіть границі послідовностей:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{2 + \sqrt{n}}; \quad б) \lim_{n \rightarrow \infty} (2n - \sqrt{4n^2 + n}); \quad в) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} - 1}{n + 1}; \quad г) \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 1}); \quad д) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 1} - 2n);$$

$$е) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 6n} - n); \quad є) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}.$$

№5. Використовуючи теореми про границі суми, добутку, частки послідовностей, довести збіжність послідовностей і знайти їх границі:

$$a) u_n = \frac{1}{2n} + \frac{2n}{3n+1}; \quad д) u_n = \frac{n^2 + n + 1}{(n+1)^2};$$

$$б) u_n = \frac{1}{3n} \cdot \sin n^2; \quad е) u_n = \frac{2n^2 + 3}{n^2 + n - 1};$$

$$в) u_n = \frac{3n^2 + 2}{4n^2 - 1}; \quad є) u_n = \frac{(n+1)(n+2)(n-1)}{n^4 + 2n + 3};$$

$$г) u_n = \frac{3n^3 - 4}{n^3 + 6}; \quad ж) u_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}.$$

4) Монотонні послідовності. Число e . Використання однієї з основних границь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \text{ до знаходження границь послідовностей.}$$

№6. Знайдіть границі:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n; \quad в) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}};$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+4}; \quad г) \lim_{n \rightarrow \infty} n (\ln(n+1) - \ln n).$$

Вказівки надаються поступово, у випадку якщо під час проведення заняття жоден студент групи не знає як підійти до розв'язання.

ВІДПОВІДІ та ВКАЗІВКИ. №4 а) Вказівка. Чисельник і знаменник дробу розділіть на $\sqrt{n}$; **б) Вказівка.** Домножте і поділіть цей вираз на спряжений до нього вираз $(2n + \sqrt{4n^2 + n})$; **в) Вказівка.** Поділіть почленно чисельник дробу на знаменник та внесіть у знаменнику дробу $\frac{\sqrt[3]{n}}{n+1}$ вираз $(n+1)$ під знак кубічного кореня;

г) Вказівка. Домножте і поділіть цей вираз на спряжений до нього вираз $(n + \sqrt{n^2 + 1})$;

д) Вказівка. Домножте і поділіть цей вираз на спряжений до нього вираз; **е) Вказівка.** Домножте і поділіть цей вираз на спряжений до нього вираз, а потім поділіть

чисельник та знаменник дробу, який одержали, на n ; **є) Вказівка.** Розкладіть на множники чисельник дробу, згрупуйте доданки у чисельнику та поділіть чисельник на знаменник почленно. **№5. б) Вказівка.** З'ясуйте, яка з функцій є нескінченно малою, а яка обмеженою; **є) Вказівка.** Розкрийте дужки у чисельнику та поділіть чисельник і знаменник дробу на n^4 ; **ж) Вказівка.** Скористайтесь у чисельнику формулою суми n перших членів арифметичної прогресії. Після цього виконайте тотожні перетворення. **№6. а) Вказівка.** Поділіть чисельник і знаменник дробу $\frac{n}{n+1}$

на n .
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^n}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e} = e^{-1};$$
 б) Вказівка. Згадайте коли показники

степенів додаються; **в) Вказівка.** Згадайте властивості логарифмів та застосуйте їх до тотожних перетворень.

Практичні заняття проводяться у формі дискусії.

Список використаних джерел:

1. Горохольська А.В., Яценко С.Є. Методика навчання математики в старшій і вищій школах. Навчально-методичний посібник для студентів спеціальностей 7.010103; 8.010101. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2007.-192 с.
2. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3ч. Ч.1. Функції однієї змінної. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища шк., 1990.-383 с.
3. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3ч. Ч.2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища шк., 1991.-366 с.
4. Давыдов Н.А. Сборник задач по математическому анализу / Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский В.Н. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов. Изд.4-е доп. - М.: Просвещение, 1973.- 256 с.
5. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Ляшенко М.Я. та ін. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2 ч.: Навч. посіб. – К.: Вища шк., 2002.-Ч.1. – 462 с.
6. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика: Приклади і задачі / Посібник.-К.: Видавничий центр "Академія", 2002.-624с.
7. Програма навчальної дисципліни «Математичний аналіз» (для освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр, спеціальностей 014 Середня освіта (Інформатика), 122 «Комп'ютерні науки») / Упоряд. Соколенко Л.О. – Чернігів, 2020. – 6 с.
8. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник. -2-ге вид., допов. і переробл.- К.: Вища шк., 2006.-582с.
9. Слєпкань З.І. Наукові засади педагогічного процесу у вищій школі: Навч. посіб. – К.: Вища шк., 2005.-239 с.
10. Слєпкань З.І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики.-Тернопіль: Підручники і посібники, 2004.-240 с.
11. Соколенко Л.О. Особливості навчання курсу математичний аналіз студентів спеціальностей 014 Середня освіта (Інформатика) та 122 Комп'ютерні науки // Традиційні та інноваційні підходи до наукових досліджень: матеріали IV Міжнародної наукової конференції, м. Житомир, 10 лютого, 2023 р. / Міжнародний центр наукових досліджень. — Вінниця: Європейська наукова платформа, 2023. — С. 175-181.
12. Соколенко О.І. Вища математика: Підручник. – К.: Видавничий центр "Академія", 2002.-432 с.
13. Соколенко О.І., Новик Г.А. Вища математика в прикладах і задачах: Навч. посібник.- К.: Либідь, 2001.-248 с.
14. Шиманський І.Є. Математичний аналіз. – К.: Вища школа, 1972.-632 с.