

ОСОБЛИВОСТІ НАВЧАННЯ КУРСУ МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ СТУДЕНТІВ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ 014 СЕРЕДНЯ ОСВІТА (ІНФОРМАТИКА) ТА 122 КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ

Соколенко Лілія Олександрівна

кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики та економіки
Національний університет «Чернігівський колегіум» імені Т.Г. Шевченка, Україна

Навчальна дисципліна «Математичний аналіз» відноситься до нормативних навчальних дисциплін для студентів, які опановують освітньо професійні програми 014 Середня освіта (Інформатика) та 122 Комп'ютерні науки. Метою вивчення цієї дисципліни є оволодіння студентами математичним апаратом, необхідним для аналізу, моделювання та розв'язування теоретичних і практичних інженерних задач. Вона вивчається протягом двох семестрів першого курсу. На її вивчення відводиться 9 кредитів ECTS, по 4,5 кредити у кожному семестрі.

Оскільки однією з компетентностей, які формуються під час навчання курсу «Математичний аналіз», є здатність до пошуку, аналізу та опрацювання інформації з різних джерел, то досить важливим є питання вибору підручників, посібників та збірників задач, призначених для навчання даного курсу.

Зупинимось на відомостях з історії створення підручника з математичного аналізу на Україні та короткій характеристиці цих підручників.

Розпочнемо з посібника І.Є. Шиманського «Математичний аналіз», який вперше був надрукований у 1960 р. і тривалий час широко використовувався у педагогічних інститутах України. Його автор Іван Євгенович Шиманський (1896-1982 р.р.) був педагогом, математиком, методистом математики, професором Київського державного педагогічного інституту імені О.М. Горького, та з 1953 року по 1971 рік завідувачем кафедри елементарної математики та методики навчання математики фізико-математичного факультету КДПІ імені О.М. Горького. Особливостями його посібника «Математичний аналіз» [11] є те, що посібник знайомить з основними ідеями та апаратом диференціального та інтегрального числення, з застосуванням їх у курсі математики середньої школи.

З 1976 року по 1979 рік Давидов Микола Олексійович (1917-1998 р.р.) – математик, педагог, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математики з 1965 року по 1989 рік КДПІ імені О.М. Горького (нині Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова) написав «Курс математичного аналізу» у 3-х частинах, який було перевидано у 1990-1992 р.р. [1]–[3].



Давидов М.О. та його учні, серед яких Бурляй М.Ф., Михалін Г.О., Соколенко О.І. та ін.



Підручник та збірник задач
Давидова М.О.

Шкіль Микола Іванович (1932-2015 р.р.) – педагог, математик, доктор фізико-математичних наук, академік АПН України, з 1973 року по 2003 рік ректор КДПІ імені О.М. Горького (нині НПУ імені М.П. Драгоманова) є автором та співавтором підручників з курсів «Математичний аналіз» [12]–[13] та «Вища математика».

Трьохтомник «Вища математика» написано ним у 1994 році у співавторстві з Колесник Тамарою Всеволодівною (нар. 1938 р.) – професором кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь НПУ імені М.П. Драгоманова.



Кафедра математики КДПІ імені
О.М. Горького



Шкіль М.І. читає лекцію з матаналізу
перед студентами НПУ
імені М.П. Драгоманова

У 2002 році вийшли підручники та посібники «Математичний аналіз» [5] та «Вища математика» [6], [9], [10] у видавництвах «Академія» та «Либідь», авторами та співавторами яких є математики Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О., Соколенко О.І. та інші.

Дані підручники та збірники задач адаптовані для викладання курсів «Математичний аналіз» та «Вища математика» для студентів вищих навчальних закладів математичних та нематематичних спеціальностей. Тому ми і використовуємо їх для навчання студентів курсу «Математичний аналіз», які опановують освітньо професійні програми 014 Середня освіта (Інформатика) та 122 Комп'ютерні науки.

До навчальної програми курсу «Математичний аналіз» [7] включено 6 змістових модулів, а саме: 1. Вступ до аналізу; 2. Диференціальне числення функції однієї змінної; 3. Інтегральне числення функції однієї змінної; 4. Диференціальне числення функцій кількох змінних; 5. Диференціальні рівняння; 6. Ряди.

Зміст цих модулів сприяє оволодінню студентами всіма компетентностями, згаданими у освітньо професійних програмах 014 Середня освіта (Інформатика) та 122 Комп'ютерні науки.

Вивчаючи курс «Математичний аналіз» студенти мають набути здатність до абстрактного та логічного мислення, здатність використання методів аналізу та синтезу, індукції й дедукції, узагальнення і конкретизації під час навчання та виконання професійних завдань.

Для формування відповідних компетентностей під час читання лекцій та проведення практичних занять у дистанційному форматі ми використовуємо структуровані таблиці математичних понять та їх властивостей по кожній з 18-ти тем курсу.

Розглянемо фрагмент **теми 3** «Числові послідовності та їх границі».

Зміст навчального матеріалу теми складають наступні питання: Числова послідовність. Поняття границі послідовності. Геометричний зміст границі. Теореми про границі послідовностей (теорема про єдиність границі; теорема про обмеженість збіжної послідовності; арифметичні властивості границь; теореми про границі,

пов'язані з нерівностями (про граничний перехід у нерівності, про границю проміжної послідовності)). Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності. Монотонні послідовності. Число e . Лема про вкладені відрізки. Лема Больцано-Вейерштрасса. Критерій Коші збіжності послідовності [7].

Мета навчання: систематизувати знання про числові послідовності, означити поняття границі послідовності та розкрити її геометричний зміст; розглянути теореми про границі послідовностей; означити поняття нескінченно малої та нескінченно великої, монотонної послідовностей; розглянути число e , лему про вкладені відрізки, лему Больцано-Вейерштрасса та критерій Коші збіжності послідовності.

Таблиця 1

Арифметичні властивості границь	
Означення 4 [9, с.86]. Якщо (x_n) і (y_n) – дві послідовності, то їхньою сумою, різницею, добутком і часткою (згідно з загальним означенням суми, різниці, добутку і частки функцій) називаються відповідно послідовності $(x_n + y_n)$, $(x_n - y_n)$, $(x_n y_n)$, $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ (у випадку частки вважається, що $y_n \neq 0 \forall n \in N$).	
Теорема 3. Якщо послідовності (x_n) і (y_n) збіжні, то збіжні також їхні сума, різниця і добуток, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (3)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (4)$ а якщо, крім того, $y_n \neq 0 \forall n \in N$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$, то й частка послідовностей (x_n) і (y_n) також збіжна, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} \quad (5)$	
Н а с л і д о к . Якщо послідовність (x_n) збіжна і k – число, то послідовність (kx_n) також є збіжною, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} (kx_n) = k \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (6)$ Аналогічними є теореми для алгебраїчної суми і добутку будь-якої скінченної кількості збіжних послідовностей.	
Зауваження. Твердження, обернені до останньої теореми, не є правильними.	Контрприклад. Кожна з послідовностей $0, 1, \dots, \frac{(-1)^n + 1}{2}, \dots$ і $1, 0, \dots, \frac{(-1)^{n+1} + 1}{2}, \dots$ є розбіжною, а їхня сума – послідовність $1, 1, \dots, 1, \dots$ – є збіжною до 1.

Структурований таким чином матеріал (табл. 1) добре сприймається студентами під час проведення лекційних, практичних та лекційно-практичних занять, які проводяться, використовуючи платформу ZOOM. Виділення формул певним кольором сприяє їх кращому сприйняттю, повторенню та вивченню і використанню під час проведення практичних занять.

Таблиці містять відомий студентам матеріал зі шкільного курсу алгебри і

початків аналізу, який повторюється протягом 1-го семестра, новий для студентів матеріал, який вивчається, приклади та контрприкладі, які дають можливість засвоювати методи та способи математичного аналізу, зрозуміти теоретичний матеріал неформально.

Саме приклади та контрприкладі сприяють набуттю студентами даних спеціальностей гнучкого способу мислення, який дозволяє зрозуміти та розв'язати проблеми та задачі, зберігаючи при цьому критичне ставлення до розглядуваних математичних теорій.

Зупинимось на питанні розгляду прикладів злічених множин (табл.2) **теми 1** «Поняття множини. Числові множини».

Таблиця 2.

Злічені множини. Зліченність множини раціональних чисел	
Множину, рівнопотужну множині натурального ряду чисел, називають зліченною множиною .	Приклад. $Z \sim N$. 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... Приклад. $Q \sim N$.
$h = p + q $ - висота раціонального числа.	$Q = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q}, p \in Z, q \in N \right\}$
Множина раціональних чисел із заданою висотою h є скінченною .	
$h=1$ $h=2$ $h=3$ $h=4$ $Q = \left\{ \frac{0}{1} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{1}, \frac{-1}{1} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{3}{1}, \frac{-3}{1} \right\} \cup \dots$ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 ...	

Схематичність представлення відповідного матеріалу економить час його розгляду на занятті і сприяє його гарному засвоєнню.

Здатність до ефективної організації власної діяльності, до роботи як незалежно і самостійно, так і в команді формується під час проведення практичних занять. Напередодні заняття студенти одержують умови завдань, які будуть розглядатись на парі та певні коментарі щодо їх розв'язування.

Розглянемо приклад таких завдань на доведення існування границі функції в точці (табл. 3). Фрагмент таблиці містить розв'язаний приклад, з допомогою яких викладач пояснює суть методу доведення, приклад для самостійного опрацювання з алгоритмом розв'язання, який студенти виконують на практичному занятті.

Таблиця 3.

Практичне заняття №4. Тема 4. Границя функції однієї змінної.	
1. Границя функції в точці. Задачі на доведення.	
№1. $f(x) = 2x - 1$. Довести, що $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$. Яким повинно бути δ , щоб для $0 < x - 2 < \delta$ мала місце нерівність $ f(x) - 3 < 0,01$?	
Доведення.	
Треба довести, що $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x, 0 < x - 2 < \delta) f(x) - 3 < 0,01$.	
Задамо $\varepsilon > 0$ і складемо вираз $ f(x) - 3 = 2x - 1 - 3 = 2x - 4 = 2 x - 2 $.	
Якщо взяти $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $\left(\frac{0,01}{2} = 0,005 \right)$, в данному випадку $\delta \leq 0,005$, то $(\forall x, 0 < x - 2 < 0,005)$	
буде $ f(x) - 3 = 2 x - 2 < 2 \cdot \delta \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.	
Отже, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$.	
Відповідь. $\delta = 0,005$.	

Продовження табл. 3.

№ 2. $f(x) = \frac{x-1}{3x+2}$. Доведіть $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{3}$ (*).
Доведення. Рівність (*) означає
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M = M(\varepsilon) > K)(\forall x, x > M) \left \frac{x-1}{3x+2} - \frac{1}{3} \right < \varepsilon$.
Завдання 2.1. Виразіть X через ε .
Завдання 2.2. Оскільки $ 3x+2 > 3x -2$, то розв'яжіть нерівність $ 3x -2 > \frac{5}{3\varepsilon}$ відносно $ x $.
Завдання 2.3. Скористайтесь означенням границі.

Такі таблиці, представлені з пропусками на платформі ZOOM, дають можливість організувати дискусію на практичному занятті, активізувати студентів, навчити їх логічно та алгоритмічно мислити.

Вмінню будувати математичні моделі, обґрунтовувати вибір методів розв'язування задач, проектувати, розробляти та аналізувати алгоритми, оцінювати їх ефективність та складність, інтерпретувати отримані результати студенти вчаться під час навчання численних тем курсу, зокрема тем змістових модулів 2-5.

Матеріал цих змістових модулів курсу надає можливість формувати здатність використовувати знання природничо-математичних, гуманітарних та соціально-економічних дисциплін у власній професійній діяльності.

Зупинимось на темі «Диференціальні рівняння 1-го порядку. Моделювання процесів диференціальними рівняннями».

Перед студентами формулюються три проблеми, які можуть виникнути перед фізиком, біологом, хіміком [8].

Проблема 1. Кількість світла, що поглинається при переході через тонкий шар води, пропорційна товщині шару та кількості світла, що попадає на його поверхню. Якщо при переході через шар товщиною 3 м поглинається половина початкової кількості світла, то яка частина цієї кількості дійде до глибини 30 м?

Проблема 2. Популяція бактерій перебуває у сприятливих для розмноження умовах. Через який час кількість бактерій подвоюється?

Проблема 3. Відомо, що в теорії розчинення лежить гіпотеза про те, що якщо температура T насиченого будь-якою сіллю розчинника одержує приріст ΔT , то розчинник набуває здатність розчинювати ще деяку кількість солі ΔS , пропорційну ΔT і тій кількості S солі, яка може розчинитися при температурі T . Яка залежність існує між S і T , якщо при $T = 0^\circ\text{C}$ розчиняється S_1 грамів солі, а при $T = T_1^\circ\text{C}$ – S_2 грамів.

Зупинимось на створенні математичної моделі для проблеми 1.

Нехай j – кількість світла, яка доходить до глибини x , а Δj – кількість світла, що поглинається при переході через шар води, товщина якого Δx .

За умовою $\Delta j = -k \cdot j \cdot \Delta x$ (знак «-» свідчить про те, що j зменшується зі збільшенням x). Звідси, $\frac{\Delta j}{\Delta x} = -k \cdot j$. Переходячи в останній рівності до границі, при $\Delta x \rightarrow 0$, одержуємо диференціальне рівняння

$$j'(x) = -k \cdot j(x). \quad (1)$$

II. Дослідження математичної моделі.

Математичною моделлю даної задачі є рівняння виду $f'(x) = k \cdot f(x)$, де k - стала (диференціальне рівняння **показникового зростання (спадання)**).

$f(x) = Ce^{kx}$, де C довільна стала - загальний розв'язок цього рівняння.

Обгрунтуємо це для рівняння (1): Оскільки $j(x) > 0$, то поділивши обидві частини рівняння (1) на $j(x)$ дістанемо $(\ln j(x))' = -k$.

Звідси $\ln j(x) = -kx + C_1$, де C_1 - довільна стала. Нехай $C_1 = \ln C$ ($C > 0$). З останнього рівняння маємо $\ln j(x) = -kx + \ln C$.

$\ln j(x) - \ln C = -kx$. За властивістю логарифмів $\ln \frac{j(x)}{C} = -kx$. За означенням логарифма $\frac{j(x)}{C} = e^{-kx}$. Звідси одержуємо **загальний розв'язок рівняння**

$j(x) = Ce^{-kx}$, де $C = \text{const}$.

Щоб з цієї множини функцій виділити ту, яка описує процес проходження світла через шар води, використаємо початкову умову $j_0 = j(0)$ - кількість світла, яке попадає на поверхню води.

Маємо $j(0) = C \cdot e^{-k \cdot 0} = C = j_0$. Отже, $j(x) = j_0 \cdot e^{-kx}$. Використовуючи другу початкову умову $j(3) = \frac{1}{2} j_0$, визначимо e^{-k} . Для цього складемо і розв'яжемо рівняння $\frac{1}{2} j_0 = j_0 (e^{-k})^3$.

Останньому рівнянню рівносильне рівняння $\frac{1}{2} = (e^{-k})^3$. Звідки маємо $e^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$. Отже, $j(x) = j_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{3}}$ - **частинний розв'язок** диференціального рівняння.

III. Інтерпретація розв'язків.

$j(x) = j_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{3}}$ - кількість світла, яка доходить до глибини x шару води.

Знайдемо відношення $\frac{j(30)}{j_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{30}{3}} = \frac{1}{1024}$.

Відповідь. $\frac{1}{1024}$ частина дійде до глибини 30 м.

Список використаних джерел:

1. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3ч. Ч.1. Функції однієї змінної. - 2-ге вид., перероб. і допов. - К.: Вища шк., 1990.-383 с.
2. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3ч. Ч.2. Функції багатьох змінних і диференціальні рівняння. - 2-ге вид., перероб. і допов. - К.: Вища шк., 1991.-366 с.
3. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3ч. Ч.3. Елементи теорії функцій

- і математичного аналізу. – 2-ге вид., перероб. і допов. – К.: Вища шк., 1992.-359с.
4. Давыдов Н.А. Сборник задач по математическому анализу / Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский В.Н. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов. Изд.4-е доп. - М.: Просвещение, 1973.- 256 с.
 5. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Ляшенко М.Я. та ін. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2 ч.: Навч. посіб. – К.: Вища шк., 2002.-Ч.1. – 462 с.
 6. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика: Приклади і задачі / Посібник.-К.: Видавничий центр "Академія", 2002.-624с.
 7. Програма навчальної дисципліни «Математичний аналіз» (для освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр, спеціальностей 014 Середня освіта (Інформатика), 122 «Комп'ютерні науки») / Упоряд. Соколенко Л.О. – Чернігів, 2020. – 6 с.
 8. Соколенко Л.О. Прикладна сила математики. Рік 2000- Всесвітній рік Математики: Матеріали міжвузівської науково-практичної конференції. – Чернігів, 2001. –С.33-36.
 9. Соколенко О.І. Вища математика: Підручник. – К.: Видавничий центр "Академія", 2002.- 432 с.
 10. Соколенко О.І., Новик Г.А. Вища математика в прикладах і задачах: Навч. посібник.- К.: Либідь, 2001.-248 с.
 11. Шиманський І.Є. Математичний аналіз. – К.: Вища школа, 1972.-632 с.
 12. Шкіль М.І. Математичний аналіз: підр-к для студ. педагогічних навчальних закладів: е 2-х ч.: -2-ге вид., перероб. і допов. / М.І. Шкіль- К.: Вища школа, 1994.- Ч 1.- 432 с.
 13. Шкіль М.І. Математичний аналіз: підр-к для студ. педагогічних навчальних закладів: е 2-х ч.: -2-ге вид., перероб. і допов. / М.І. Шкіль- К.: Вища школа, 1995.- Ч 2.- 509 с.