

ПІДВИЩЕННЯ ЯКОСТІ ПРОЦЕСУ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ТОЧНОСТНОГО ТАРИРУВАННЯ

Прокоф'єв Андрій Юрійович

ORCID ID: 0000-0002-4520-4248

аспірант Інституту комп'ютерних систем

Національний університет «Одеська політехніка», Україна

Положаєнко Сергій Анатолійович

ORCID ID: 0000-0002-4082-8270

Д-р. техн. наук, професор, завідувач кафедри

комп'ютеризованих систем та програмних технологій

Національний університет «Одеська політехніка», Україна

Одним з основних якісних показників обчислювальних засобів є точність результатів розв'язування ними прикладних задач, зокрема, задач моделювання та управління динамічними системами. Однак, не дивлячись на широке використання засобів обчислювальної техніки (ОТ), проблему оцінки точності обчислень не можна вважати розв'язаною. Гострота проблеми полягає у складності аналізу похибок обчислень, яка призводить до громіздкості аналітичних обґрунтувань та до великого обсягу обчислень, необхідних для отримання конкретних числових даних, особливо при розв'язуванні прикладних задач, зокрема задач математичної фізики [1-3].

Останні пов'язані з числовою реалізацією математичних моделей (ММ) досліджуваних динамічних систем із застосуванням засобів ОТ [3, 4], які (моделі) можуть бути описані в рамках узагальненої ММ виду:

$$A_k y = x, \quad (1)$$

де:

A_k — оператор, який є елементом певного набору можливих операторів для конкретної задачі (або типу засобу ОТ); y, x — шуканий розв'язок та відома права частина (числа, вектори, функції), які мають свої обмежені області визначення.

Розглядаючи проблему точності реалізації ММ (1), слід зазначити, що первинні похибки у початкових даних призводять до необхідності розв'язувати наближену задачу

$$\tilde{A}_k \tilde{y} = \tilde{x}, \quad (2)$$

де:

$$\tilde{A}_k = A_k + \Delta A_k, \quad \tilde{x} = x + \Delta x.$$

Машинний (наближений) розв'язок можна виразити у вигляді:

$$\tilde{y} = R_m \tilde{x}, \quad (3)$$

де:

R_m — машинний алгоритм, який являє собою систему операцій в універсальних

або спеціалізованих засобах ОТ, а тому зосереджують в собі всю сукупність первинних інструментальних похибок, а також похибку метода розв'язування, який реалізується.

Похибка розв'язку, що очевидно, визначається як:

$$\Delta y = \tilde{y} - y, \quad (4)$$

Може бути віднайдена лише при відомому точному розв'язку y , що обмежує прикладне застосування (4) в якості розрахункового виразу лише випадками розв'язування тестових (аналітичних) задач. Однак на практиці використовують метод аналізу похибки при більш точних контрольних розрахунках, що відповідає наступному виразу для похибки

$$\Delta y = \tilde{y} - \tilde{\tilde{y}}, \quad (5)$$

де:

$\tilde{\tilde{y}}$ — також машинний, але завідома більш «точний» розв'язок, який можна визначити як $\tilde{\tilde{y}} = \bar{R}_m \tilde{x}$, причому $\bar{R}_m$ — машинний алгоритм, який забезпечує підвищену точність розв'язку.

В літературі (наприклад, [2, 4]) відомі методи аналізу точності при числовому розв'язуванні систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

$$Ax = b, \quad (6)$$

де:

A — неособлива матриця n -го порядку; b та x — n -мірні вектори правої частини та шуканого розв'язку.

При цьому найбільшого поширення набули: методи класичної теорії точності (теорії чутливості [2, 4]); проведення завідома більш точних обчислень при розв'язуванні вихідної задачі [2]; застосування аналітичних оцінок типу нерівності [3].

Принцип тарування надає певні можливості щодо усунення вказаних вище ускладнень. Ці можливості полягають в тому, що основна частина обчислень при аналізі точності виконуються завчасно, результатом чого є таблиці (або графіки), що відбивають залежність показників точності від первинних похибок для різних класів задач.

Для розробки методу тарування при реалізації ММ динамічних систем в задачах моделювання та управління [5] виконаємо аналіз неусувної похибки розв'язку системи (6), яка виникає при розгляді останньої у стані збудження:

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b, \quad (7)$$

де:

$\Delta A = \{\Delta a_{ij}\}$; $i, j = \overline{1, n}$ — матриця первинних похибок завдання коефіцієнтів матриці A ; $\Delta b = \{\Delta b_i\}$; $i = \overline{1, n}$ — вектор похибок (збуджень) правих частин; Δx — вектор похибок розв'язку.

Як вихідну оцінку неусувної похибки оберемо оцінку норми вектора похибок

$$\|\Delta \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{\varepsilon}\|, \quad (8)$$

де:

$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - \mathbf{b}$ – вектор нев'язок.

Застосування оцінки (8) обмежено випадком, коли «точно» відомі матриця $\mathbf{A}$ та вектор $\mathbf{b}$. Тим не менш, вона найліпше підходить до побудови тарировального процесу, оскільки дозволяє отримувати розподіли для величини $\|\Delta \mathbf{x}\|$, виходячи з функції розподілу норми вектора нев'язок $\boldsymbol{\varepsilon}$, що, у свою чергу, дає можливість визначити границю довірливості для похибки, яка аналізується.

Компоненти вектора нев'язок $\boldsymbol{\varepsilon}$ як правило є незалежними нормально розподіленими випадковими величинами з параметрами

$$m_{\varepsilon_i} \approx m_{\Delta b_i} - \sum_{j=1}^n m_{\Delta a_{ij}} x_j; \quad i = \overline{1, n}, \quad (9)$$

$$\sigma_{\varepsilon_i} \approx \left(\sigma_{\Delta b_i}^2 + \sum_{j=1}^n \sigma_{\Delta a_{ij}}^2 x_j^2 \right)^{1/2}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (10)$$

де:

$m_{\Delta b_i}$, $m_{\Delta a_{ij}}$, $\sigma_{\Delta b_i}^2$, $\sigma_{\Delta a_{ij}}^2$ – математичні очікування та дисперсії відповідних випадкових величин; x_j – компоненти розв'язку (8).

Внаслідок використання представлення вектора нев'язок $\boldsymbol{\varepsilon}$ у вигляді $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{m}_{\varepsilon}$ ($\mathbf{D}$ – діагональна матриця, елементи якої визначаються за виразом (10); $\mathbf{m}_{\varepsilon}$ – вектор, компоненти якого визначаються за виразом (9); $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ – випадковий нормальний вектор з нульовим середнім та одиничною кореляційною матрицею) можна отримати наступну оцінку

$$\|\Delta \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| (\|\mathbf{D}\| \cdot \|\boldsymbol{\varepsilon}_0\| + \|\mathbf{m}_{\varepsilon}\|), \quad (11)$$

яку, як і відповідну оцінку для відносної похибки, вже можна використовувати для тарировання СЛАУ за точністю, причому критерієм класу є порядок системи n , точністним параметром класу – функція розподілу $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|$, а точністними параметрами задачі – величини $\|\mathbf{A}^{-1}\|$, $\|\mathbf{D}\|$ та $\|\mathbf{m}_{\varepsilon}\|$.

З метою тарировання представляється доцільним табулювання функцій розподілу різних норм вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ для різних СЛАУ. При цьому норми величин, що входять до виразу (11), а саме: значення функцій розподілу $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_1$ можна обчислити за формулою

$$F_{\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_1, n}(\tau) = \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\tau} e^{-(t/2)^2} dt \right)^n, \quad (12)$$

значення функції розподілу $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_2$ – за формулою

$$F_{\|\mathbf{\epsilon}_0\|_{2,n}}(\tau) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\tau F_{\|\mathbf{\epsilon}_0\|_{2,n-1}}(t) e^{-(\tau-t/2)^2} dt, \quad (13)$$

причому

$$F_{\|\mathbf{\epsilon}_0\|_{2,2}}(\tau) = F_{\|\mathbf{\epsilon}_0\|_{1,2}}(\tau/\sqrt{2}). \quad (14)$$

Наявність цих функцій розподілу дозволяє легко будувати оцінку знизу для функцій розподілу $\|\Delta \mathbf{x}\| \left(\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right)$ (або оцінку границі довірливості для похибки) шляхом зміни масштабу незалежної змінної відповідної функції розподілу величини $\|\mathbf{\epsilon}_0\|$ у $\|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{D}\| \left(\frac{\|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{D}\|}{\|\mathbf{x}\|} \right)$ раз і зсув початку координат вліво на $\|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{m}_\epsilon\| \left(\frac{\|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{m}_\epsilon\|}{\|\mathbf{x}\|} \right)$.

Уведемо випадкову величину $T_i(\mathbf{A})$, ($i = 1, 2, 3, \dots$) – індекс норми, яку будемо називати у подальшому коефіцієнтом корекції 1 роду, причому таку, що

$$\|\Delta \mathbf{x}\|_i = T_i(\mathbf{A}) \|\mathbf{A}^{-1}\|_i \cdot \|\mathbf{\epsilon}\|_i. \quad (15)$$

Тоді, на підставі (11) та (18) витікає очевидне співвідношення

$$\|\Delta \mathbf{x}\|_i \geq \frac{\|\mathbf{\epsilon}\|_i}{\|\mathbf{A}\|_i}, \quad (16)$$

яке можна використовувати для побудови оцінок зверху функції розподілу $\|\Delta \mathbf{x}\|_i$ (або нижньої границі довірливості похибки).

Уведемо також випадкову величину $q_i(\mathbf{A})$, ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) – індекс норми, яку, відповідно, будемо називати коефіцієнтом корекції 2 роду, таку, що визначається виразом

$$\|\Delta \mathbf{x}\|_i = \frac{\|\mathbf{\epsilon}\|_i}{q_i(\mathbf{A}) \|\mathbf{A}\|_i}. \quad (17)$$

З (15) та (17) витікає (за умови, що Θ – внутрішня точка області Ω можливих значень елементів $\mathbf{\epsilon}$):

$$T_i(\mathbf{A}) q_i(\mathbf{A}) = \frac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|_i \|\mathbf{A}\|_i}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (18)$$

та

$$\max_{\epsilon_i \neq 0} T_i(\mathbf{A}) = \max_{\epsilon_i \neq 0} q_i(\mathbf{A}) = 1; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (19)$$

а з (18) та (19)

$$\min_{\epsilon_i \neq 0} T_i(\mathbf{A}) = \min_{\epsilon_i \neq 0} q_i(\mathbf{A}) = \frac{1}{\|\mathbf{A}\|_i \|\mathbf{A}^{-1}\|_i}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (20)$$

Таким чином, нижня границя випадкових величин $T_i(\mathbf{A})$ та $q_i(\mathbf{A})$ залежить тільки від міри обумовленості матриці $\mathbf{A}$. Функції розподілу $F_{T_i}(\tau)$ і $F_{q_i}(\tau)$ величин $T_i(\mathbf{A})$ та $q_i(\mathbf{A})$ залежать як від обумовленості матриці $\mathbf{A}$, так і від розподілу вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ по області Ω .

Можна показати, що при розподілі вектора $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, випадкові величини $T_i(\mathbf{A})$ та $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i$ є незалежними при $i = n$ та залежні при $i = \overline{1, (n-1)}$. Однак залежність в останньому випадку має слабкий характер, а тому у практичних розрахунках нею можна знехтувати. Таким чином, знаючи функції розподілу величин $T_i(\mathbf{A})$ та $\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|_i$, враховуючи (15) можна визначити функцію розподілу величини $\|\Delta \mathbf{x}\|_i$.

Висновки. В роботі розроблено теоретичні засади методу точностного тарування при числовій реалізації засобами ОТ ММ динамічних систем в задачах моделювання та управління.

Метод дозволяє дати оцінку точності одержаного розв'язку, виходячи з первинних похибок, що обумовлено початковими даними, та ґрунтується на аналізі неусувної похибки розв'язку СЛАР (суть формалізованого представлення моделей динамічних систем), яка виникає при розгляді перехідних (динамічних) режимів функціонування досліджуваних систем.

Список використаних джерел:

1. Kim, Y. & Peskin C.S. (2007) Penalty immersed boundary method for an elastic boundary with mass. Phys Fluids, (5), 45-62. In: <https://doi.org/10.1063/1.2734674>.
2. Яхно О. М. & Мачуга О. С. (2016) Ексергійний аналіз та метод варіаційних нерівностей в деяких задачах гідромеханіки. Вісник НТУУ «КПІ». №3 (3, 78), 19-25. Вилучено з: <http://dx.doi.org/10.20535/2305-9001.2016.78.73382>.
3. Положаєнко С. А. & Лись Д. А. (2021) Моделювання хвильових процесів у газорідних системах. Математичне та комп'ютерне моделювання, (22), 88-96. Вилучено з: <http://mcm-tech.kpnu.edu.ua/issue/archive>. DOI: 10.32626/2308-5916.2021-22.88-96.
4. Пташник М. (2002) Нелінійні псевдопараболічні рівняння та варіаційні нерівності. Нелінійні граничні задачі, (12), 140-153. Вилучено з: <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/169224>.
5. Лись Д. А. & Прокоф'єв А. Ю. (2023) Числова реалізація математичної моделі гравітаційної хвилі на границі поділу двошарової рідинної системи. Інформатика та математичні методи в моделюванні, (13, 1-2), 97-103. Вилучено з: <http://immm.opu.ua/#a23>; http://immm.opu.ua/files/archive/n3v12_2022/immm_n1-2_v13_2023.pdf. DOI: 10.15276/imms.v13.no1-2.97.